2. 或ル種ノ組合セ函數方程式ニ就イテ

南雲道夫

今カラ十數年前ニ 東北數學雜誌ノ第三巻ニ於テ 數藤斧三郎氏ガ On some functional equations ト題サレテ 或ル種ノ組合セ函數方程式ヲバ ホボ統一的ニ研究サレタ。 然シナガラ數藤氏ハ 形式的ニ運算ヲ無反省ニホドコサレテ居ルノデ 論理ノ嚴密ヲ缺キ ナホ微積分ヲバ勝手ニ用ヒラレタ 筆者ハ之ニ対シ 約三年前ニ 共立社ノ續輓近高等數學講座デ(雜録) 氏ノ研究ノ特殊ナ場合ヲバ 只ノ連續性ヤ純單調性ノミヲ假定シテ論ジタ 所デ數藤氏ノ研究デハ

$$f(\varphi(x_1,\dots,x_l;y_1,\dots,y_m);z_1,\dots,z_n)$$
$$=g(x_1,\dots,x_l;\psi(y_1,\dots,y_m;z_1,\dots,z_n))$$

ト云ウ函數方程式ガ基礎的ナ役目ヲシテ居ル (上ノ l, m, n ガ一般ニハ等シクナイ事ガ 注目スベキ点デアル) 筆者ハ上ノ函數方程式ヲバ ナルベク一般的ナ仮定ノ下ニ於テ 連續群ノ問題ニ変換シテ見タノデアル (ソノ方法ハ全ク elementar デアル)

扨テ函數方程式

$$\text{(A)}\qquad f(\varphi(x,y),z)=g(x,\psi(y,z))$$

ニ於テ 各変數 x, y, z ハ夫々 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ナル三個ノ metrische Räume ニ属スル任意ノ点トシ 函數 f, g, φ, ψ ノ取ル値(?)モ或ル一ツノ metrischer Raum R ノ点デアルト仮定スル (同一ノ R!) 更ラニ $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, R$ ハ im Kleinen kompakt ト仮定スル

次ニ方程式　$f(r,z)=r'$　及ビ　$g(x,r)=r'$　$(r'\in R)$
ハ夫々(聯立ニアラズ各別々ニ)．rニツイテハ常ニ一義的ニ解ケ　xヤzニツイテハ多義的或ハ一義的ニ解ケルモノトスル

又方程式　$\varphi(x,y)=r$　及ビ　$\psi(y,z)=r$　$(r\in R)$
モ夫々(各々別々ニ)　x,y,zノイヅレニツイテモ多義的或ハ一義的ニ解ケルモノト仮定スル

尚ホ函数 f,g,φ,ψ ハスベテソノ定義サレタ範囲 $(x\in X, y\in Y, z\in Z, r\in R)$ ニ於テ連続(勿論一意)函数デアルト仮定スル．

以上ノ仮定ニヨリ結局函数方程式(A)ハRデ定義サレタ連続群ノ組合セノ法則ヲ表ハス方程式

$$\text{(B)}\qquad H(H(r,r'),r'')=H(r,H(r',r''))$$

ニ変換サレル $(r,r',r''\in R)$　$H(r,r')$ハ連続デアル

即チ　$r=\alpha(x),\ r'=\beta(y),\ r''=\gamma(z)$ ハ X,Y,ZヲRヘノ一意連続写像(逆ハ一意トキマラヌ)デ　T_1,T_2 ハ RヲR自身ヘノ可逆的一意連続写像トシテ

$$\text{(C)}\quad \begin{aligned} &f(r,z)=H(T_1r,\gamma(z)) \qquad g(x,r')=H(\alpha(x),T_2r') \\ &\varphi(x,y)=T_1^{-1}H(\alpha(x),\beta(y)) \qquad \psi(y,z)=T_2^{-1}H(\beta(y),\gamma(z)) \end{aligned}$$

デアル　又 $H(r,r')=r''$ ハR内デ常ニrヤr'ニ付一義的ニ解ケル

((証明))　第一段　(A)ニ於テ $y=b\ (b\in Y)$ トオキ

$$\varphi(x,b)=\varphi_1(x),\ \psi(b,z)=\psi_2(z)\ \text{トオケバ}$$

$$f(\varphi_1(x),z)=g(x,\psi_2(z))$$

$\varphi_1(x)$ヤ$\psi_2(x)$ハ夫々X,YヲRヘノ一意連続写像デアル

$$(1)\quad f(r, z) = h(r, \psi_2(z))$$

$$(2)\quad g(x, r') = h(\varphi_1(x), r')$$

ナル形ニ f, g ガ表ハセル　但シ $h(r, r')$ ハ r, r' ノ各々ニツイテ, 連続一意函数デ ソノ逆モ一意連続デアル

所ガ $h(r, r')$ ハ R ノ内部デ im Kleinen デ (r, r') ニツキ一様ニ連続ナル事ガ証明出来ルカラ $h(r, r')$ ハ (r, r') ニツイテ連続デアル

第二段　(A) ニ於テ $z = c$ トオキ $f(r, c) = T_1 r$ 及ビ $\psi(y, c) = \psi_1(y)$ トオケバ

$$(3)\quad T_1\, \varphi(x, y) = g(x, \psi_1(y)) = h(\varphi_1(x), \psi_1(y))$$

但シ T_1 ハ R ヲ R 自身ヘノ可逆一意連続写像デアリ $\psi_1(y)$ ハ Y ヲ R ヘノ一意連続写像デアル

次ニ (A) ニ於テ $x = a$, $g(a, r') = T_2 r'$, $\varphi(a, y) = \varphi_2(y)$ トオケバ

$$(4)\quad T_2\, \psi(y, z) = f(\varphi_2(y), z) = h(\varphi_2(y), \psi_2(z))$$

但シ T_2 ハ R ヲ其自身ヘノ可逆一意連続写像デ $\varphi_2(y)$ ハ Y ヲ R ヘノ一意連続写像デアル

第三段　(A) ニ於テ $x = a$　$z = c$ トオケバ

$$(5)\quad T_1\, \varphi_2(y) = T_2\, \psi_1(y)$$

トナル　ソコデ

$$h(T_1^{-1} r, T_2^{-1} r') = H(r, r')$$

$$T_1\, \varphi_1(x) = \alpha(x) = r$$

$$T_2\, \psi_1(y) = T_1\, \varphi_2(y) = \beta(y) = r'$$

$$T_2\, \psi_2(z) = \gamma(z) = r''$$

トオケバ結局 (A)ハ (1)(2)(3)(4)(5)ニヨツテ (B)トナリ、f, g, φ, ψ ハ (C)ナル形ニアラハセル $H(\gamma, \gamma')$ ノ連続性ヤ α, β, γ ノ一意連続性ナドモ 容易ニワカル事デアル

之デ証明ハ了ツタ

数藤氏ノ場合ニ於ケル如ク XYZ ガ R ヨリモ高次元ノ空間 (R ヲ有限ナ次元ノ空間トスル中) トシテ 此ノ問題ヲ利用シテ種々ナ函数方程式ヲバ連続群ノ問題ニ変換スル事ガ出来ルデアロウ 筆者ハ読者ト共ニソノ問題ニ向ツテ オモムロニ歩ヲ進メンド欲シテ居マス 又此ノ問題ハ XYZ ガ diskret ナ集合デアツテモ勿論同様ニ成立スル

以上 六月三十日